



# 流動・加工問題における数値計算技術の高度化

－非圧縮性条件の取り扱いが計算結果に及ぼす影響－

流動や加工の問題では、材料を非圧縮性体とする場合が多い。FEMなどの数値計算において、この非圧縮性条件を厳密に満足させるには、数値計算に関する技術要素が必要となる。非圧縮性条件を取り扱う場合によく用いられているペナルティ法に関する留意点は、多くの文献<sup>1),2)</sup>で述べられている。しかし、その他にも非圧縮性の取り扱いが原因となり数値計算上不具合が生じることがある。例えば、鍛造や押し出し問題の加工解析を非定常計算する場合に生じる体積変化、光ファイバー線引き・圧延・押し出し問題における定常状態の形状やひずみ分布などを定常計算で求めようとする場合に生じる体積変化などである。ここでは、不具合が生じない厳密な取り扱いを紹介する。

## 増分時の体積変化

ひずみ速度成分（垂直ひずみ速度成分  $\dot{\epsilon}_i = \partial u_i / \partial x_i$ 、せん断ひずみ速度成分  $\dot{\gamma}_{ij} = \partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j$ ）および回転速度成分を用いて時間増分  $\Delta t$  間での体積ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{vol}$  を表すと、次式(1)のようになる<sup>3)</sup>。なお、座標系を  $(x_1, x_2, x_3)$ 、速度を  $(u_1, u_2, u_3)$  としている。

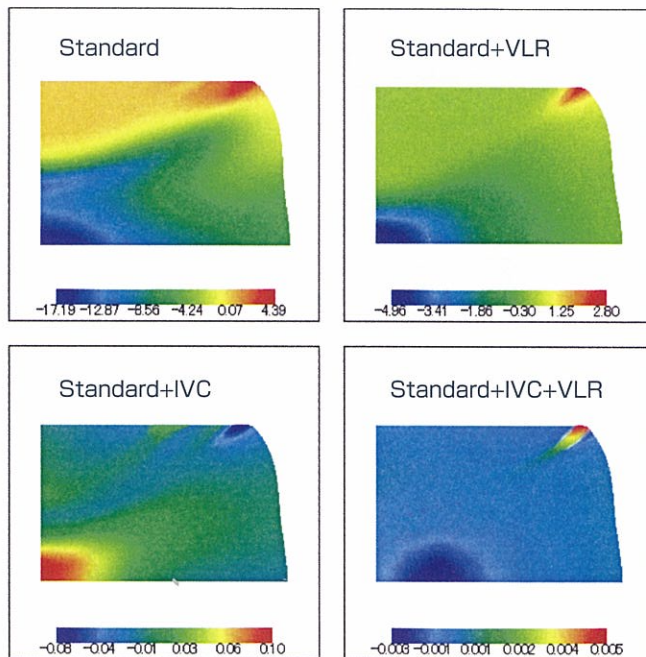
$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{vol} = & \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 + \left[ \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3)^2 - \frac{1}{2} \{ (\dot{\epsilon}_1)^2 \right. \\ & + (\dot{\epsilon}_2)^2 + (\dot{\epsilon}_3)^2 \} - \frac{1}{4} \{ (\dot{\gamma}_{12})^2 + (\dot{\gamma}_{23})^2 \\ & + (\dot{\gamma}_{31})^2 \} + \{ (\dot{\omega}_1)^2 + (\dot{\omega}_2)^2 + (\dot{\omega}_3)^2 \} ] \Delta t \\ & + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

これより、発散  $div u = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3$  が0であっても、時間増分が大きいと体積ひずみ速度は0とならないことがわかる。また、垂直ひずみ速度成分およびせん断ひずみ速度成分は体積減少を、回転速度成分は体積増加をもたらすことがわかる。

体積保存性を向上させる手法としては、増分間での体積変化  $\dot{\epsilon}_{vol} \times \Delta t$  が許容値以下となるように式(1)を用いて時間増分を自動的に決定する方法、過去に蓄積された体積変化を増分間で一掃するように非圧縮性条件を設定する体積補償法 (VLR: Volume Loss Recovery)、増分間で体積変化を生じさせないように非圧縮性条件を設定する体積増分制御法 (IVC: Incremental Volume Control) などが考えられる<sup>3),4),5)</sup>。

第1図は圧下率70%時の円柱ビレットの体積変化分布を示しており、そ

での変位増分は5%という比較的大きな値が設定されている<sup>3)</sup>。ビレット中心における体積は通常のFEM (Standard) では17%も減少しているが、VLRの機能を付加 (Standard+VLR) した場合は5%減少する程度となっており、IVCの機能を付加 (Standard+IVCまたはStandard+VLR+IVC) すると体積変化はほとんど生じないことがわかる。このように通常のFEMにVLRやIVCの機能を付加すると体積変化が大きく改善されることより、これらの有効性が確認できる。



第1図 圧下率70%時の円柱ビレット体積変化率分布

- 1) 計算力学ハンドブック 第1巻有限要素法(構造編) 9.4鍛造, (1998), p.26, 日本機械学会.
- 2) Bercovier, M., Hasbani, Y., Gilon, Y. & Bathe, K.J.: Hybrid and mixed finite element methods, (1984), p.497, John Wiley & Sons.
- 3) 豊島史郎, 後藤学, 商健: 塑性と加工, Vol.42 (2001) No.491, p.1179.
- 4) Coupez, T and Chenot, J.L.: Proc. NUMETA, 1990, p.894.
- 5) 豊島史郎, 後藤学, 商健: 塑性と加工, Vol.43 (2002) No.501, p.993.
- 6) Si, Oh, C.C., Chen and K. Kobayashi: Transactions of ASME, Journal of Engineering for Industry, Vol.101 (1979) No.1, p.36.
- 7) K. Mori, K. Osakada and T. Oda: Int. J. Mech. Sci., Vol.24 (1982) No.9, p.519.
- 8) O.C. Zienkiewicz: Numerical Analysis of Forming Processes, (1984), p.1, John Wiley & Sons.

## 定常計算で用いる流線法

定常状態における形状やひずみ分布などの内部状況を非定常解析手法で計算しようとする、計算時間が長くなる。さらに、要素が大きくひずんで要素の再分割を必要とする場合もある。流線積

分による流線法を用いるとこのような問題は生じず、比較的短い時間で定常状態における形状やひずみ分布などを得ることができる<sup>6),7),8)</sup>。

## 流線積分

流線は次式(2)で表される。なお、材料流れの主流方向を $x_1$ 方向とする。

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{u_2}{u_1} \quad \frac{dx_3}{dx_1} = \frac{u_3}{u_1} \quad \dots\dots\dots (2)$$

計算初期の流線は仮定されたものであり式(2)を満たしていない。そこで、次式(3)の積分により入口境界から流線を表す節点の座標を修正して再度速度場を求め、流線位置が収束するまでこの繰り返し計算を行い、定常状態の流線を求める。

$$x_{2,i} = x_{2,1} + \sum_{i=1}^n \int_{x_{1,i}}^{x_{1,i+1}} \frac{u_2}{u_1} dx_1, \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$x_{3,i} = x_{3,1} + \sum_{i=1}^n \int_{x_{1,i}}^{x_{1,i+1}} \frac{u_3}{u_1} dx_1$$

ここで、 $(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i})$ は流線上の節点 $i$ の座標成分であり、 $i=1$ は入側、 $i=n$ は出側を示す。式(3)の積分（以降、流線積分と呼ぶ）を行う場合、通常、中点での値を用いて計算される<sup>9)</sup>。しかし、次節で示されるように、厳密な流線を求めようとすると適切な積分手法を用いる必要がある。

### 流線の条件および流線積分の積分手法

流線の接線方向を $t$ 、法線方向を $n$ とすると、流線が満足すべき条件は法線方向速度 $u_n(t)$ が常に0となることである（強形式）。

$$u_n(t) \equiv 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

しかし、数値解析でこの条件を厳密に満足させることは困難である。そこで、流線となる要素辺 $i, i+1$ での法線方向流量 $Q_{i,i+1}$ が0となるように、式(4)を式(5)のように弱形式化する。

$$Q_{i,i+1} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_n(t) dA \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $dA$ は奥行きを考えた要素辺の微小面積である。

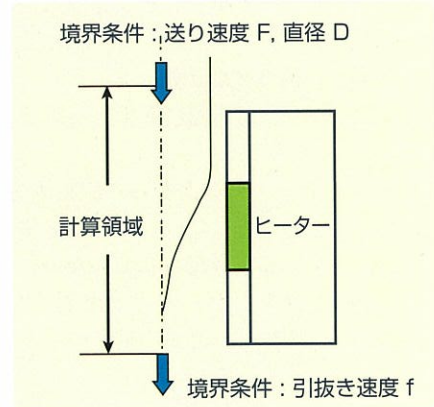
また、節点 $i$ と $i+1$ は流線上に存在しなければならないことより、次式(6)で示される $\Delta n$ は0となる必要がある。

$$\Delta n = \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_n(t) / u_t(t) dt \quad \dots\dots\dots (6)$$

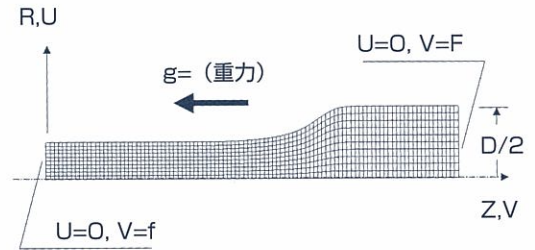
上式(5)および(6)の検討より、 $Q_{i,i+1}=0$ および $\Delta n=0$ の両条件を満たす積分点 $\xi_0$ は、平面ひずみ問題の場合 $\xi_0=0$ （中点）、軸対称問題の場合 $\xi_0=(r_{i+1}-r_i)/3(r_i+r_{i+1})$ となり、厳密性を追求す

る場合、この $\xi_0$ で低減数値積分（1点積分）を行う必要があることがわかる<sup>10)</sup>。

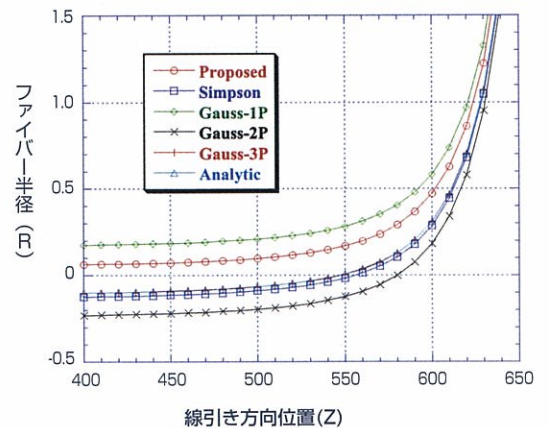
光ファイバー線引き炉内におけるプリフォームネックダウン形状のシミュレーションを取り上げる。第2図に炉内におけるネックダウン形状の模式図、第3図に計算途中の要素分割図、第4図に各種の数値積分手法により求まるネックダウン形状結果を示す<sup>10)</sup>。



第2図 光ファイバー線引き炉内におけるネックダウン



第3図 計算途中におけるメッシュ図



第4図 各種の数値積分手法によるネックダウン形状

なお、上記の選択低減積分手法以外の方法では解を得ることができなかったため、第4図ではそこで求めた解に対して各種積分手法を適用した場合に得られるネックダウン形状を示している。

9) R.I. Tanner, R.E. Nickell and R.W. Bilger: Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng. Vol.6(1975), p.155.

10) S.Toyoshima and M.Gotoh: Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications, (2001), p.115, Balkema.

この問題では、入側境界で形状（プリフォーム直径D）と送り速度F、出側で引抜き速度fが既知であるため、出側での形状（ファイバー直径d）は

DF/fとなる。通常の計算手法では厳密解dは求まらず、上記の計算手法を適用した場合のみ解を得ることが可能となり、その有効性を確認できる。

## 定常計算における三次元要素の構成

前節で示されたように、二次元問題では流線積分における数値積分手法を適切に行えば厳密な流線位置が求まる。しかし、三次元問題では、一つの流線ではなく流線より形成される面（以降、流線面と呼ぶ）が対象となること、さらにこの流線面からの流出流量Qが0となる速度場の特徴を解析的に求めることは困難であることより、二次元問題での手法を三次元問題に適用することはできない。

通常のFEMでは、流線面からの流出流量Qが0となるという条件は入っておらず、定常状態における条件Q=0は一般に満足されていない。そこで、定常状態では各流線面からの流出流量が0となること、および全要素面の流出流量和が0となる条

件を要素構成において考慮することにより、流線に沿う条件と非圧縮性条件を取り扱う。具体的な要素の定式化は文献<sup>11),12)</sup>を参照していただきたい。

第1表は四辺形断面棒のダイレス引抜きに対する計算結果であり、出側での引抜き速度 $U_0$ を変化させた場合の引抜き方向の中央断面での流量 $Q_m$ と出側断面における流量 $Q_o$ を示している<sup>12)</sup>。なお、入側断面での流量は $Q_i=4$ であり、厳密解は $Q_i=Q_m=Q_o$ である。これより、引抜き速度 $U_0$ が大きくなると、すなわち減面率が大きくなると、通常のFEM要素を用いた計算では大きな誤差が生じるが、上記の構成を行った要素を用いると厳密解を得ることができ、その有効性を確認することができる。

第1表 各種の要素による中央横断面および出側面での流量

### CONVENTIONAL METHODS

Velocity at exit	Type-0		Type-1	
	Penalty at S-R Int. point		Penalty (Mixed Form.)	
$U_0$	$Q_m$	$Q_o$	$Q_m$	$Q_o$
2	4.0133	4.0212	3.9609	4.0004
10	4.7381	4.9137	3.6584	4.0661
50	9.6564	10.506	3.3168	4.5117
100	15.898	17.530	3.1974	4.9078

### PROPOSED METHODS

Velocity at exit	Type-2-0		Type-2-1		Type-2-2	
	S.F.Int. point 1,1,1,1,1,1		S.F.Int. point 2,2,1,1,1,1		S.F.Int. point 2,2,2,2,2,2	
$U_0$	$Q_m$	$Q_o$	$Q_m$	$Q_o$	$Q_m$	$Q_o$
2	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	3.9609	4.0004
10	4.0001	3.9998	4.0001	3.9998	3.6584	4.0661
50	4.0001	3.9996	4.0001	3.9995	3.3168	4.5117
100	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	3.1974	4.9078

計算環境（計算機速度の向上、計算機コストの低下）の発展、および数値計算や可視化技術の高度化および汎用化により、多くの産業分野で数値シミュレーションが使われている。このシミュレーション技術がソリューションビジネスにおける

本質的なツールとなるためには、さらに数値計算技術を高度化する必要がある。

ここでの紹介事項が高度化のための活動に役立てば幸いである。

[エンジニアリングメカニクス事業部 流熱加工技術室 豊島 史郎]

- 11) 豊島史郎,後藤学:第52回塑性加工連合講演会講演論文集, (2001), p.301.  
12) Toyoshima,S., Gotoh,M: Key Engineering Materials, Vols.233-236(2003), p.749.